**СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ**

Одним из понятий теории вероятностей является понятие случайной величины.

Под ***случайной величиной*** понимается переменная величина, которая в результате испытания в зависимости от случая принимает одно из возможного множества своих значений (какое именно – заранее не известно).

Случайные величины бывают дискретными и непрерывными.

***Дискретной*** называется случайная величина, принимающая только отделенные друг от друга (изолированные) значения, которые можно перечислить.

***Непрерывной***называется случайная величина,все возможные значения которой целиком заполняют некоторый конечный или бесконечный промежуток числовой оси.

**Способы описания случайных величин**

Случайная величина считается заданной, если известен закон распределения случайной величины.

**Закон распределения вероятностей дискретной случайной величины**

***Законом******распределения*** дискретной случайной величины называют соответствие между возможными значениями случайной величины и их вероятностями.

Распределение дискретной случайной величины может быть задано аналитически (в виде формулы), в виде таблицы и графически.

Если дискретная случайная величина *Х* принимает конечное множество значений   
*x*1, *x*2,…, *x*n  соответственно с вероятностями   
*p*1, *p2*, …, *p*n , то ее закон распределения определяется формулами

*Р*(*Х* = *хi*) = *рi* (*i* = 1, 2, …, *n*),



Этот закон можно задать и таблицей:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| ***X*** | ***x*1** | ***x*2** | **….** | ***x*n** |
| ***P*** | ***p*1** | ***p2*** | **…** | ***p*n** |



Такую таблицу называют ***рядом распределения случайной величины X.***

Для наглядности закон распределения дискретной случайной величины изображают графически, для чего в прямоугольной системе координат строят точки (*xi*, *pi*) и соединяют их отрезками прямых. Полученную фигуру называют ***многоугольником распределения*** *(****полигоном****)****.***

**Пример 1.** Задают ли законы распределения дискретной случайной величиныследующие таблицы?

а)

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| *X* | 2 | 3 | 4 | 5 |
| *P* | 0,1 | 0,4 | 0,3 | 0,2 |

б)

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| *X* | 6 | 7 | 8 | 9 |
| *P* | 0,1 | 0,2 | 0,3 | 0,5 |

**Пример 2.** Дискретная случайная величина *Х* имеет закон распределения:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *Х* | 0,2 | 0,4 | 0,6 | 0,8 | 1 |
| *Р* | 0,1 | 0,2 | 0,4 | *р*4 | 0,1 |

Чему равна вероятность *р*4?

Построить многоугольник распределения данной случайной величины.

***Решение****.*

*р*1 + *р*2 + *р*3 + *р*4 + *р*5 = 1, то

*р*4 = 1 – (*р*1 + *р*2 + *р*3 + *р*5) =

=1 – (0,1 + 0,2 + 0,4 + 0,1) = 1 – 0.8 = 0.2.

0 0,2 0,4 0,6 0,8 1 *х*

*р*

0,4

0,3

0,2

0,1

0

**Пример 3.** Подбрасываются две монеты и подсчитывают число гербов. Рассматривается дискретная случайная величина *Х* – число выпадений гербов на обеих монетах. Записать закон распределения случайной величины *Х*.

***Решение.***

В данном опыте четыре равновозможных исхода: (Г, Г), (Г, Ц), (Ц, Г), (Ц, Ц).

Случайная величина *Х*может принимать только три значения: ***x = 0, x2 = 1, x3 = 2.***

Найдем вероятности этих значений:

*Р*(*Х* = 0) = 1/4 = 0,25;

*Р*(*Х* = 1) = 2/4= 0,50;

*Р*(*Х* = 2) = 1/4 = 0,25,

*р*1 = 0,25, *р*2 = 0,50, *р*3 = 0,25,

*р*1 + *р*2 + *р*3 = 1.

Закон распределения данной случайной величины:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| *X* | 0 | 1 | 2 |
| *P* | 0,25 | 0,50 | 0,25 |

***Функцией распределения*** называют функцию , определяющую для каждого значения ***х*** вероятность того, что случайная величина (***СВ Х)*** располагается левее значения ***х***.

***Свойства функции распределения***

1. Область значений 

2.  – неубывающая функция

3. , если Х   
(т.е. если ***x*** – наименьшая варианта)

, если Х >   
(т.е. если ***x*** – наибольшая варианта)

**Пример.** Построить  по данному распределению:

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|  | 8/60 | 17/60 | 16/60 | 1/6 | 1/10 | 1/30 | 1/60 |

График такой функции имеет вид:

F\*(x)

1

X

*1 2 3 4 5 6*

5/6

4/6

3/6

2/6

1/6

**ЧИСЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН**

Закон распределения полностью характеризует случайную величину, но если он неизвестен, то можно пользоваться числами, которые описывают случайную величину; такие числа называют ***числовыми характеристиками*** случайной величины.

Основными являются: ***математическое ожидание, дисперсия, среднее квадратическое отклонение, мода и медиана.***

**Числовые характеристики дискретной**

**случайной величины**

***Математическим******ожиданием*** дискретной случайной величины *X* называется сумма произведений всех возможных ее значений на вероятности этих значений, т.е.



или 

Математическое ожидание характеризует положение случайной величины на числовой оси, определяя некоторое среднее значение, около которого сосредоточены все возможные значения случайной величины.

**Свойства математического ожидания**

;

;

;

   
(для независимых случайных величин).





**Задача 1.** Две мишени вращаются вокруг своих осей так, что сектора неразличимы. При попадании в ***i-***й сектор 1 мишени стрелок получает *2i* призовых очков и 3***\*i*** очков для 2-й мишени. Записать законы распределения и построить полигоны (многоугольники) распределений СВ:

Х – число очков при попадании в ***i-***й сектор 1 мишени,

У – число очков при попадании в ***i-***й сектор 2 мишени. Найти средний выигрыш Х и У.

Законы распределения СВ ***Х***:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| ***Х*** | ***2*** | ***4*** | ***8*** | ***16*** | ***32*** |
| ***Р*** | ***1/2*** | ***1/4*** | ***1/8*** | ***1/16*** | ***1/16*** |

Законы распределения СВ ***У***:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| ***У*** | ***3*** | ***6*** | ***9*** | ***12*** | ***15*** |
| ***Р*** | ***1/4*** | ***1/4*** | ***1/4*** | ***1/8*** | ***1/8*** |

Средний выигрыш ***Х и У:***

***М(Х) = 2\*1/2 + 4\*1/4 + 8\*1/8+ 16\*1/16 + 32\*1/16= =1+1+1+1+2 = 6***

***М(У) = 3\*1/4 + 6\*1/4 + 9\*1/4+ 12\*1/8 + 15\*1/8 =***

***= (6+12+18+12+15)\*1/8 = 62/8***

**ПРИМЕР.** Даны законы распределения случайных величин ***Х*** и **У**

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| ***Х*** | ***-10*** | ***-6*** | ***-2*** | ***1*** | ***3*** | ***5*** | ***8*** | ***10*** |
| ***р*** | ***1/16*** | ***1/8*** | ***1/4*** | ***1/16*** | ***1/4*** | ***1/16*** | ***1/8*** | ***1/16*** |

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| ***У*** | ***-2*** | ***-1*** | ***0*** | ***1*** | ***2*** | ***3*** | ***4*** | ***5*** |
| ***р*** | ***1/4*** | ***1/4*** | ***1/16*** | ***0*** | ***1/16*** | ***1/8*** | ***1/8*** | ***1/8*** |

Построить разброс значений **Х** и **У,** найти математические ожидания ***М(Х)*** и ***М(У).***

***М(Х) = 7/8, М(У) = 7/8***

***Дисперсией случайной величины*** *X* называется математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от её математического ожидания, т.е.



или 

или .

****

Смысл дисперсии заключается в том, что она характеризует средний квадратичный разброс случайной величины вокруг своего математического ожидания.

**Свойства дисперсии**

; где ***C = Const.***

; ***C = Const.***

   
(для независимых случайных величин).



(для независимых случайных величин).

5. ***D(X) ≥ 0.***

Дисперсия случайной величины имеет размерность квадрата случайной величины; для наглядной характеристики рассеяния удобнее пользоваться величиной, размерность которой совпадает с размерностью случайной величины.

***Средним******квадратическим******отклонением*** *(****стандартом******отклонения****)* ***случайной величины*** *X* называется квадратный корень из дисперсии этой величины .

Среднее квадратическое отклонение дает представление о размахе колебаний случайной величины около математического ожидания.

**Пример.** Дискретная СВ задана таблицей. Найти математическое ожидание, дисперсию, среднеквадратическое отклонение, функцию распределения и построить график.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| ***Х*** | ***0*** | ***1*** | ***2*** |
| ***Р*** | ***0.2*** | ***0.5*** | ***0.3*** |

***Решение:***

***Функция распределения СВ Х – это вероятность Р( Х < х).***

1. ***х ≤ 0***

***Р( Х < х) = 0***

1. ***0 < х ≤ 1***

***Р( Х < х) = 0.2***

1. ***1 < х ≤ 2***

***Р( Х < х) = 0.2 + 0.5 = 0.7***

1. ***х > 2***

***Р( Х < х) = 0.2 + 0.5 + 0.3 = 1***

***Числовые характеристики:***

1. Математическое ожидание

***М(Х) = .***

***М(Х) = 0\*0.2+1\*0.5+2\*0.3 = 0.5 +0.6 = 1.1***

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| ***Х*** | ***0*** | ***1*** | ***2*** |
| ***Р*** | ***0.2*** | ***0.5*** | ***0.3*** |

1. ***D(Х) = М [X - М(Х)]2***

****

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| ***Х2*** | ***0*** | ***1*** | ***4*** |
| ***Р*** | ***0.2*** | ***0.5*** | ***0.3*** |

***М(Х2) = 0\*0.2+1\*0.5+4\*0.3 = 1.7***

***D(Х) = 1.7 - 1.12 = 1.7 – 1.21 = 0.49***

***Коэффициент вариации*** ***v –*** характеристика изменчивости.

***Коэффициент вариации*** равен

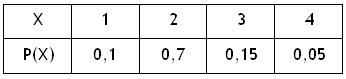
***v = σ(X)/М(Х)*** или ***v = (σ(Х)/М(Х))\*100%***

При ***v ≤ 10%*** - незначительная изменчивость признака. При ***10% <*** ***v ≤ 20%*** - средняя,

при ***v ≥ 20%*** значительная изменчивость.

***Мода*** – наиболее вероятное значение случайной величины (наиболее часто встречающееся значение в интервале данных). Для симметричных распределений мода равна математическому ожиданию. Моду обозначаем символом ***М0***.

**Пример.** Если ряд распределения дискретной случайной величины Х имеет вид:



то ***М0 = 2.***

***Медианой (****Mе)* случайной величины Х называется такое ее значение, относительно которого равновероятно получение большего и меньшего значения этой случайной величины:

***P(X < Mе) = P(X > Mе) = 0.5.***

***Медиана*** – это значение случайной величины, которое делит площадь, ограниченную кривой распределения, пополам (т.е. середина численного ряда или интервала).

***Квантиль*** ***хр*** (квантиль уровня ***р***) СЛ.В., имеющей функцию распределения ***F(x)*** – это решение уравнения ***F(x) = р***, где ***р*** – вероятность.

(***р = 0.5 –*** медиана, ***р = 0.25*** и ***р = 0.75 –*** нижняя и верхняя квартили).

***Начальным моментом*** ***порядка k*** дискретной СВ Х называется число ***αk (νk): αk = M(Xk)***

https://dl.khadi.kharkov.ua/pluginfile.php/47897/mod_book/chapter/5456/Lekciy/Lek8/Lek8_2.files/image010.jpg

Начальный момент 1 порядка равен математическому ожиданию.

***Центральным моментом порядка k*** дискретной СВ Х называется число ***μk = М[X – M(X)] k***

https://dl.khadi.kharkov.ua/pluginfile.php/47897/mod_book/chapter/5456/Lekciy/Lek8/Lek8_2.files/image012.jpg

Здесь ***mx = M(X)***

Центральный момент 1 порядка всегда равен нулю, а центральный момент 2 порядка равен дисперсии.

***Коэффициент асимметрии*** ***(А)*** ***–*** это числовая характеристика случайной величины, равная отношению [центрального момента](https://allll.net/wiki/%D0%A6%D0%B5%D0%BD%D1%82%D1%80%D0%B0%D0%BB%D1%8C%D0%BD%D1%8B%D0%B9_%D0%BC%D0%BE%D0%BC%D0%B5%D0%BD%D1%82_k-%D0%BE%D0%B3%D0%BE_%D0%BF%D0%BE%D1%80%D1%8F%D0%B4%D0%BA%D0%B0_%D0%B4%D0%B8%D1%81%D0%BA%D1%80%D0%B5%D1%82%D0%BD%D0%BE%D0%B9_%D1%81%D0%BB%D1%83%D1%87%D0%B0%D0%B9%D0%BD%D0%BE%D0%B9_%D0%B2%D0%B5%D0%BB%D0%B8%D1%87%D0%B8%D0%BD%D1%8B) третьего порядка к кубу среднеквадратического отклонения.

***Коэффициент асимметрии равен:***

***A = μ3/ σ3*** или ***А = М[X – M(X)] 3/ σ3(X)***

***Асимметричность*** (***коэффициент асимметрии или скоса)*** характеризует смещение распределения относительно математического ожидания.

При положительном значении коэффициента распределение скошено вправо, т.е. его более длинная часть лежит правее центра (математического ожидания) и обратно. Для симметричных распределений коэффициент асимметрии ***А*** равен нулю.

***Коэффициент эксцесса*** или ***эксцесс*** ***(Е)*** ***–*** это числовая характеристика случайной величины, равная разности отношения [центрального момента](https://allll.net/wiki/%D0%A6%D0%B5%D0%BD%D1%82%D1%80%D0%B0%D0%BB%D1%8C%D0%BD%D1%8B%D0%B9_%D0%BC%D0%BE%D0%BC%D0%B5%D0%BD%D1%82_k-%D0%BE%D0%B3%D0%BE_%D0%BF%D0%BE%D1%80%D1%8F%D0%B4%D0%BA%D0%B0_%D0%B4%D0%B8%D1%81%D0%BA%D1%80%D0%B5%D1%82%D0%BD%D0%BE%D0%B9_%D1%81%D0%BB%D1%83%D1%87%D0%B0%D0%B9%D0%BD%D0%BE%D0%B9_%D0%B2%D0%B5%D0%BB%D0%B8%D1%87%D0%B8%D0%BD%D1%8B) четвёртого порядка к четвёртой степени [среднеквадратического отклонения](https://allll.net/wiki/%D0%A1%D1%80%D0%B5%D0%B4%D0%BD%D0%B5%D0%BA%D0%B2%D0%B0%D0%B4%D1%80%D0%B0%D1%82%D0%B8%D1%87%D0%B5%D1%81%D0%BA%D0%BE%D0%B5_%D0%BE%D1%82%D0%BA%D0%BB%D0%BE%D0%BD%D0%B5%D0%BD%D0%B8%D0%B5_%D0%B4%D0%B8%D1%81%D0%BA%D1%80%D0%B5%D1%82%D0%BD%D0%BE%D0%B9_%D1%81%D0%BB%D1%83%D1%87%D0%B0%D0%B9%D0%BD%D0%BE%D0%B9_%D0%B2%D0%B5%D0%BB%D0%B8%D1%87%D0%B8%D0%BD%D1%8B) и числа 3.

***Эксцесс*** вычисляют по формуле***:***

***Е = μ4/ σ4 – 3*** или ***E= М[X –M(X)] 4/σ4(X) – 3*.**

***Эксцесс*** – характеристика «сглаженности» графика плотности или многоугольника распределения.

Остроконечность (положительное значение эксцесса) или пологость (отрицательное значение) распределения по сравнению с стандартной кривой. Эксцесс нормального распределения ***Е*** = 0.

C помощью функции распределения ***F*(*x*)** можно вычислить вероятность того, что случайная величина *X* примет значение из интервала ***(а, b)?***

